

Chapitre 1 – Principes de base de la théorie des jeux

EXTRAIT DU PROGRAMME : 4. Concurrence imparfaite. Notions élémentaires de théorie des jeux : stratégie dominante, équilibre de Nash, dilemme du prisonnier.

PLAN DU COURS

- I. INTRODUCTION : NOUVELLE MICROECONOMIE ET THEORIE DES JEUX
- II. PRESENTATION D'UN JEU : LE DILEMME DU PRISONNIER ET L'EQUILIBRE DE NASH
 - A. LE JEU DU DILEMME DU PRISONNIER ET LES STRATEGIES DOMINANTES
 - B. L'EQUILIBRE DE NASH
 - 1. DEFINITION
 - 2. LIMITES
 - C. LA METHODE DE L'INDUCTION A REBOURS
- III. TYPOLOGIE DES JEUX
 - A. LES JEUX STATIQUES ET DYNAMIQUES
 - B. LES JEUX REPETES
 - 1. DEFINITION
 - 2. REPETITION EN HORIZON INFINI
 - 3. REPETITION EN HORIZON FINI
 - C. LES JEUX DE COOPERATION ET DE NON COOPERATION

MOTS CLES : jeu, stratégies, gains/pertes, joueurs, issues, coopération/coordination, stratégies dominantes, équilibre de Nash, arbre de Kuhn, équilibre de Nash parfait en sous-jeux, dilemme du prisonnier, optimum de Pareto, stabilité, unicité, point focal, induction à rebours, jeux statiques/dynamiques, jeux répétés, menace crédible, jeux de coopération/non coopération, *folk theorem*, stratégie « œil pour œil ».

AUTEURS/THEORIES: Adam Smith, John Von Neumann et Oskar Morgenstern (1944)^{***}, Emile Borel, Augustin Cournot (1838)^{***}, Joseph Bertrand (1883)^{***}, Heinrich von Stackelberg (1934)^{***}, Albert Tucker (1950)^{***}, Reinhard Selten (1965)^{***}, Thomas Schelling (1960)^{***}, Robert Axelrod (1984)^{***}.

BIBLIOGRAPHIE :

Hachon, C. & Laurent, R-A. (2013). Microéconomie – Cours et applications. Nathan sup : Chapitre 8 – Théorie des jeux et interactions stratégiques.

EXERCICE N°1 : Le dilemme du prisonnier d’Albert Tucker (1950)

Deux suspects sont arrêtés par la police. Mais les agents n'ont pas assez de preuves pour les inculper, donc ils les interrogent séparément en leur faisant la même offre. « *Si tu dénonces ton complice et qu'il ne te dénonce pas, tu seras remis en liberté et l'autre écoperà de 10 ans de prison. Si tu le dénonces et lui aussi, vous écopererez tous les deux de 5 ans de prison. Si personne ne dénonce l'autre, vous aurez tous deux 1 an de prison.* »



Le dilemme du prisonnier représenté sous forme **normale** ou **matricielle** :

Années de détention		Prisonnier 2	
		Ne pas dénoncer	Dénoncer
Prisonnier 1	Ne pas dénoncer	(1, 1)	(10, 0)
	Dénoncer	(0, 10)	(5, 5)

Question 1.1 Caractériser l’information de ce jeu.

Question 1.2 Déterminez la stratégie dominante¹ de chaque joueur.

Question 1.3 Déterminez si cette stratégie est rationnelle ; Pareto optimale.

¹Une **stratégie dominante** est une stratégie qui rapportera **toujours plus** au joueur qu'une autre stratégie, quelle que soit la stratégie de l'autre joueur.

EXERCICE N°2 : Les limites du concept de l’équilibre de Nash

Admettons que chaque joueur a les **possibilités de gains** suivantes :

CAS 1 :

En milliers d’euros		Joueur 2	
		Oui	Non
Joueur 1	Oui	(1, 2)	(0, 4)
	Non	(0, 5)	(3, 2)

Question 2.1 Déterminez l’équilibre de ce jeu. Que pouvez-vous en conclure ?

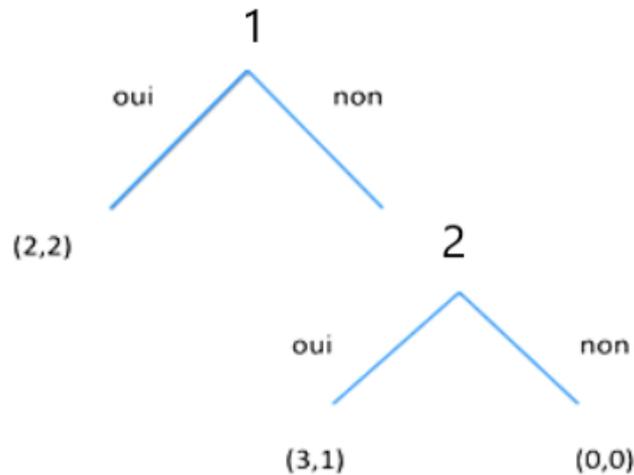
CAS 2 :

En milliers d’euros		Joueur 2	
		Oui	Non
Joueur 1	Oui	(2, 2)	(2, 2)
	Non	(3, 1)	(0, 0)

Question 2.2 Déterminez l'équilibre de ce jeu. Que pouvez-vous en conclure ?

EXERCICE N°3 : La méthode de l'induction à rebours

Reprenons le cas 2 précédent, et représentons-le sous la forme d'un **arbre de Kuhn, ou sous forme extensive**. On fait l'hypothèse que le joueur 1 joue en premier.



Question 3.1 En utilisant la méthode de l'induction à rebours, déterminez l'équilibre de ce jeu, appelé équilibre de Nash parfait en sous-jeux (Reinhard Selten, 1965) : combinaison de stratégies qui constitue un équilibre de Nash pour chacun des sous-jeux du jeu (respect de la rationalité séquentielle).

Question 3.2 En utilisant la méthode de l'induction à rebours, déterminez l'équilibre de ce même jeu si le joueur 2 joue en premier :

EXERCICE N°4 : Equilibres de Nash et publicité

On considère un marché émergent sur lequel interviennent deux entreprises, A et B. Chaque entreprise peut décider ou non d'engager une dépense de publicité. Lorsqu'une firme est seule à réaliser une campagne de publicité, cette campagne permet à l'entreprise de gagner un avantage de notoriété et d'augmenter sa demande, ce qui couvre ses dépenses de publicité et génère un profit élevé. Dans le même temps, elle attire aussi des consommateurs sur le marché, ce qui améliore la situation de sa concurrente, qui n'a pas supporté la dépense de publicité. En revanche, lorsque toutes les firmes réalisent la dépense de publicité, la demande est partagée ce qui permet juste aux entreprises de couvrir les frais de publicité engagés car le marché est étroit. Si aucune firme n'effectue de publicité, alors le marché reste confidentiel et les entreprises réalisent des pertes. La matrice de gain de ce jeu est la suivante :

Gain		B	
		Publicité	Pas de publicité
A	Publicité	(0, 0)	(3, 1)
	Pas de publicité	(1, 3)	(-1, -1)

Source : Hachon, C. & Laurent, R-A. (2013). Microéconomie – Cours et applications. Nathan sup

Question 4.1 Caractériser l'information de ce jeu. On suppose que les entreprises décident simultanément de réaliser ou non la campagne de publicité.

Question 4.2 Ce jeu comporte-t-il des stratégies dominantes ? Déterminez le ou le(s) équilibre(s) de Nash en stratégies pures de ce jeu.

Question 4.3 L'entreprise A décide avant l'entreprise B. représentez le jeu sous forme extensive. Existe-t-il un équilibre de Nash parfait en sous-jeu ?

Question 4.4 On suppose maintenant que l'entreprise B prend sa décision avant l'entreprise A. Représentez le jeu sous forme extensive. Existe-t-il un équilibre de Nash parfait en sous-jeu ?

Question 4.5 Comparez les résultats obtenus dans les deux questions précédentes et commentez.

On suppose maintenant que les entreprises prennent leurs décisions simultanément mais chaque entreprise décide de réaliser la dépense de publicité avec une certaine probabilité. La probabilité de mener la campagne est notée P_A pour l'entreprise A et P_B pour l'entreprise B.

Question 4.6 Identifiez les équilibres de Nash en stratégies mixtes. Montrez qu'il est possible de retrouver les résultats de la partie 1.

Question 4.7 Quelle est l'espérance de gain des entreprises lorsqu'elles ont recours aux stratégies mixtes ?

I. Introduction : nouvelle microéconomie et théorie des jeux

- La théorie des jeux fait partie de ce que l'on appelle la **nouvelle microéconomie**. Cette dernière remet en cause les **hypothèses de la concurrence parfaite**, notamment celle d'**information parfaite** tout en conservant l'hypothèse de **rationalité** des agents.
 - Elle crée une **rupture** en remettant en cause la **parfaite efficacité des mécanismes concurrentiels**.
 *Lecture du Cahiers Français – Les avancées de la nouvelle microéconomie.*
- ⇒ La théorie des jeux permet de montrer que les décisions **individuelles rationnelles prises sans concertation** alors qu'il existe des **interactions stratégiques** et une information **imparfaite**, entraînent généralement un **gaspillage de ressources**.
- Les pères fondateurs de la théorie des jeux sont **John Von Neumann (mathématicien hongrois, un des « pères » de la bombe atomique aux Etats-Unis)** et **Oskar Morgenstern (mathématicien allemand)** (*Theory of Games and Economic Behavior*, 1944), ainsi qu'**Emile Borel (mathématicien français, La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche, 1921)**.
 - On peut noter que la théorie des jeux se développe en **pleine guerre froide...**
 - **Augustin Cournot (1838)** et **Joseph Bertrand (1883)** sont eux les précurseurs de cette théorie lors de leur étude de la concurrence **oligopolistique**.
 - **Heinrich von Stackelberg (1934)** l'a mise en pratique dans le cas d'une information **asymétrique**.

II. Présentation d'un jeu : le dilemme du prisonnier et l'équilibre de Nash

A. Le jeu du dilemme du prisonnier et les stratégies dominantes

- Un **jeu** comporte une liste d'individus (**joueurs**), un **ensemble de choix possibles** pour chaque joueur (**stratégies**) et des **issues** associées avec des **gains/pertes**. Le jeu est assorti d'une **règle** du jeu.
 - Chaque jeu s'inscrit dans un **univers informationnel donné**.
- Information **complète** : chaque joueur dispose de **toute l'information disponible** sur les caractéristiques du jeu (**connaissance commune**). Parmi les jeux à information complète, on distingue :
 - Information **parfaite** : les agents connaissent **toutes les décisions antérieures** des agents avant de prendre la leur (cas des **jeux séquentiels** uniquement).
 - Information **imparfaite** : quand les décisions sont **simultanées** avec **absence de concertation préalable (dilemme du prisonnier)** ou lorsque certains agissent dans le **secret**.
- Information **incomplète** : au moins un joueur **ne connaît pas** une des composantes du jeu, que ce soit les règles du jeu, le nombre et l'identité des autres joueurs etc.

- **Exercice n°1 + vidéo à regarder sur Arte disponible sur le site internet du cours.**

Le dilemme du prisonnier d'Albert Tucker (1950) :

Question 1.1 Caractériser l'information de ce jeu.

Question 1.2 Déterminez la stratégie dominante de chaque joueur.

Question 1.3 Déterminez si cette stratégie est rationnelle ; Pareto optimale.

- ⇒ La recherche de l'intérêt **individuel** ne permet pas toujours d'atteindre un optimum **collectif** (Adam Smith, « main invisible »). Seule une **coordination** permettant une **coopération** peut permettre d'éviter le gaspillage.
- Cela permet de **justifier l'intervention de l'État** dans l'économie (**optimalité de second rang**).

B. L'équilibre de Nash

1. Définition

- **Ensemble de stratégies** tel qu'aucun joueur ne peut obtenir un gain supplémentaire en changeant **unilatéralement** de stratégie, celle de chaque autre joueur étant **donnée** : **absence de regret** (John Nash, 1951).
 - Equilibre de Nash **strict** : toute déviation **unilatérale** de l'équilibre conduit à un gain **strictement inférieur**.
 - Equilibre de Nash **faible** : toute déviation **unilatérale** de l'équilibre conduit à un gain **inférieur**.
- Lorsqu'il existe une **stratégie dominante** pour **chaque** joueur, l'EN est toujours donné par **l'intersection des stratégies dominantes**.

2. Limites

- L'équilibre de Nash ne correspond **pas nécessairement** à l'optimum de Pareto.
Exemple : dilemme du prisonnier d'Albert Tucker (1950).

- **Exercice n°2. Question 2.1 Déterminez l'équilibre de ce jeu. Que pouvez-vous en conclure ?**

- **Exercice n°2. Question 2.2 Déterminez l'équilibre de ce jeu. Que pouvez-vous en conclure ?**

C. La méthode de l'induction à rebours

- La méthode de l'induction à rebours consiste à prédire **ce qui va se passer dans l'avenir et à raisonner en revenant vers le présent** (représentation du jeu sous la forme d'un arbre, soit sous forme **extensive**).
 - Il s'agit de **remonter le jeu de la fin vers le début**, en sautant de sous-jeu en sous-jeu après avoir déterminé le ou les équilibres de Nash de **chacun des sous-jeux**.

- **Exercice n°3.**

Question 3.1 Déterminez l'équilibre de ce jeu.

Question 3.2 Déterminez l'équilibre de ce même jeu si le joueur 2 joue en premier.

III. Typologie des jeux

A. Les jeux statiques et dynamiques

- **Statiques** : situations dans lesquelles les individus procèdent à des choix **simultanés** et **non coordonnés**.
 - Exemple :
- **Dynamiques/séquentiels** : situations dans lesquelles les individus jouent de manière **séquentielle**.
 - L'ordre des coups a un **rôle fondamental** dans la dynamique des jeux.
 - Exemple :

B. Les jeux répétés

1. Définition

- Répétition **successive** d'un même jeu.
- La **répétition** permet l'**observation** de l'action des autres agents : **apprentissage** vers une information **parfaite**.
 - Les agents peuvent alors mettre en place des **stratégies de coopération** permettant d'atteindre un **optimum de Pareto**.
 - Cela doit être assorti de **sanctions/menaces crédibles**, au risque sinon de revenir à l'**équilibre de Nash**. Cette possibilité dépend de l'**horizon temporel** du jeu.

2. Répétition en horizon infini

- La menace peut être **crédible** : la coopération est **possible** et l'optimum de **Pareto** est **atteignable**.
 - Dans le **dilemme du prisonnier**, chaque joueur s'engage à **coopérer (ne pas dénoncer)** après avoir observé qu'ils étaient perdants **tous les deux** s'ils ne coopèrent pas (**équilibre de Nash**).
 - Ils savent que **si un des deux dévie (dénonce)**, l'autre s'engage à le dénoncer au cours de **toutes les prochaines interactions**. Ce qui est très **couteux** !
- Ainsi, la **coopération** en économie ne repose pas que sur des **vellétés altruistes** mais peut naître d'un arrangement entre des agents **égoïstes et rationnels** en horizon **infini**.
- **Folk theorem** : toute issue **individuellement rationnelle** pour les joueurs peut constituer un équilibre dans un **jeu répété à l'infini**.
 - Multitude d'équilibres possibles : coopération **tout au long du jeu** « à l'infini » ou **stratégie de type « œil pour œil » (Robert Axelrod, 1984)** :
 - Economie **expérimentale** : répétition du dilemme du prisonnier 200 fois (horizon temporel quasi-infini).
 - Un joueur commence par coopérer à la première période, et continue de le faire tant que l'autre joueur coopère. **Dès qu'il y a trahison**, le joueur trahit également à la période suivante. Et il coopère à **nouveau** dès que l'autre joueur recommence à coopérer.

3. Répétition en horizon fini

- La menace n'est **pas crédible** : la coopération est **impossible**. L'**optimum de Pareto n'est pas atteignable**.
 - **En partant de la dernière période**, chaque joueur sait que l'autre a **intérêt à dévier** à la **dernière** période par rapport à la stratégie de coopération.
 - **Par induction à rebours**, les agents anticipent la **dénonciation** de l'autre et préfère le dénoncer **dès le premier tour**.
- La coopération demeure **possible**, si l'horizon est **fini mais incertain** (les agents ne connaissent pas le nombre de leurs interactions). La menace redevient alors **crédible**.

C. Les jeux de coopération et de non-coopération

- Jeux **coopératifs** : jeux dans lesquels on cherche la **meilleure situation** pour les joueurs sur des critères tels que **la justice, l'entraide, la sympathie**.
 - On considère qu'ensuite les joueurs **vont jouer ce qui aura été choisi**. Il s'agit d'une **approche normative**.
 - Analyse de la cohérence des **choix de groupe**.
 - Exemple :

- Jeux **non coopératifs** : les décisions sont prises **unilatéralement**.
 - Chacun essaye d'optimiser **sa situation**.
 - Analyse de la cohérence des **choix individuels**.
 - Exemple :

- **Exercice n°4 à préparer chez soi.**